

## МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ОБРАБОТКИ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ КОСМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

УДК 528:551.4

### РАСЧЕТ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ВЫСОТЫ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ ЛИНИЙ РЕЛЬЕФА ПО СПУТНИКОВЫМ ДАННЫМ И ТОПОГРАФИЧЕСКИМ КАРТАМ

© 2008 г. И. В. Флоринский

Институт математических проблем биологии РАН, Пушкино Московской обл.

Тел.: (4967) 73-24-08, e-mail: iflor@mail.ru

Поступила в редакцию 13.03.2008 г.

Выделение линий экстремальной кривизны земной поверхности – структурных линий рельефа – является важным этапом при решении многих прикладных и фундаментальных задач геоморфологии, геологии и смежных дисциплин. Структурные линии могут быть аналитически описаны производящей функцией высоты, которая зависит от первых, вторых и третьих частных производных высоты. Представлен вывод формул для расчета третьих частных производных по цифровой модели высот, заданной на квадратной сетке. Приводится пример выделения линий экстремальной кривизны рельефа с помощью расчета цифровой модели производящей функции.

#### ВВЕДЕНИЕ

Выделение линий экстремальной кривизны земной поверхности – структурных линий рельефа (водоразделов, тальвегов, бровок и подножий) – является важным этапом при решении многих прикладных и фундаментальных задач геоморфологии, геологии и смежных дисциплин. Для автоматизированного выделения структурных линий по цифровым моделям высот (ЦМВ) предложено большое число алгоритмов [1–7]. В отличие от

методов расчета локальных морфометрических характеристик, основанных на подходах дифференциальной геометрии [8, 9], выделение тальвеговой и водораздельной сети, как правило, основано на логических процедурах анализа ЦМВ, таких как пошаговое определение направления линии тока и пр.

Вместе с тем структурные линии рельефа могут быть аналитически описаны с помощью производящей функции высоты ( $T$ ):

$$T = \frac{1}{\sqrt{(p^2 + q^2)^3 (1 + p^2 + q^2)}} \left\{ q^3 a - 3pq^2 b + 3p^2 qc - p^3 d + \frac{(q^2 r - 2pqs + p^2 t)[pq(t - r) + s(p^2 - q^2)](2 + 3p^2 + 3q^2)}{(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)} \right\}. \quad (1)$$

Если высота  $z$  задана в виде  $z = f(x, y)$ , где  $x, y$  – декартовы координаты, то

$$a = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad d = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \quad b = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad c = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Теоретически обосновано, что линии водоразделов и бровок являются множеством точек  $T = 0$  при положительных значениях горизонтальной кривизны земной поверхности ( $k_h$ ), а линии тальвегов и подножий – множеством точек  $T = 0$  при  $k_h < 0$  [10].

Значения первых и вторых частных производных высоты  $r, t, s, p$  и  $q$  (2) могут быть рассчитаны по ЦМВ, заданной на квадратной сетке, с помощью методов аппроксимации частных производных конечными разностями. Благодаря высокой точности и устойчивости к шуму наибольшее рас-

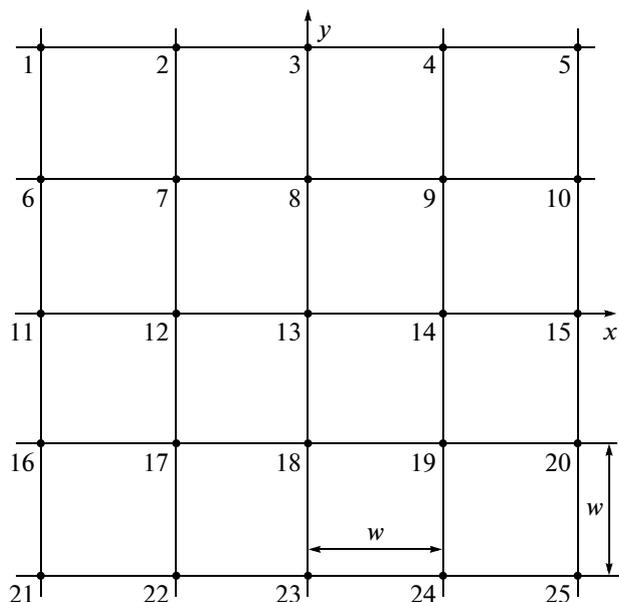


Рис. 1. Скользящее окно  $5 \times 5$ . 1, ..., 25 – номера точек,  $w$  – шаг сетки.

пространение получил метод Эванса [11, 12]. В соответствии с этим методом [13], полином второго порядка приближается методом наименьших квадратов к точкам скользящего окна (матрице высот) размера  $3 \times 3$  с шагом  $w$ . Для точек окна известны декартовы координаты и высоты. Значения  $r$ ,  $t$ ,  $s$ ,  $p$  и  $q$  определяются для центральной точки окна. Перемещая скользящее окно  $3 \times 3$  вдоль ЦМВ, можно рассчитать значения  $r$ ,  $t$ ,  $s$ ,  $p$  и  $q$  для всех точек ЦМВ, кроме крайних строк и столбцов.

Насколько нам известно, до сих пор не опубликованы формулы для вычисления третьих частных производных высоты  $a$ ,  $d$ ,  $b$  и  $c$  (2) по ЦМВ. Кроме того, отсутствуют работы, где показана практическая возможность использования производящей функции (1) для выделения структурных линий рельефа по ЦМВ. В данной статье дается вывод формул третьих частных производных высоты для их расчета по ЦМВ, заданной на квадратной сетке. Приводится пример выделения линий экстремальной кривизны рельефа по ЦМВ с помощью расчета цифровой модели производящей функции.

### ВЫВОД ФОРМУЛ

Рассмотрим скользящее окно размера  $5 \times 5$  (рис. 1). Для точек этого окна  $(-2w, 2w, z_1)$ ,  $(-w, 2w, z_2)$ ,  $(0, 2w, z_3)$ ,  $(w, 2w, z_4)$ ,  $(2w, 2w, z_5)$ ,  $(-2w, w, z_6)$ ,  $(-w, w, z_7)$ ,  $(0, w, z_8)$ ,  $(w, w, z_9)$ ,  $(2w, w, z_{10})$ ,  $(-2w, 0, z_{11})$ ,  $(-w, 0, z_{12})$ ,  $(0, 0, z_{13})$ ,  $(w, 0, z_{14})$ ,  $(2w, 0, z_{15})$ ,  $(-2w, -w, z_{16})$ ,  $(-w, -w,$

$z_{17})$ ,  $(0, -w, z_{18})$ ,  $(w, -w, z_{19})$ ,  $(2w, -w, z_{20})$ ,  $(-2w, -2w, z_{21})$ ,  $(-w, -2w, z_{22})$ ,  $(0, -2w, z_{23})$ ,  $(w, -2w, z_{24})$  и  $(2w, -2w, z_{25})$  известны их декартовы координаты и высоты.

Приближим полином третьего порядка [14]

$$z = \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{6}dy^3 + \frac{1}{2}bx^2y + \frac{1}{2}cxy^2 + \frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{2}ty^2 + \quad (3)$$

$$+ sxy + px + qy + u$$

к скользящему окну  $5 \times 5$  с помощью метода наименьших квадратов [15]. Записав полином (3) для 25 точек скользящего окна, получаем систему 25 линейных нормальных уравнений, которая может быть представлена в виде

$$\alpha = \mathbf{F}\beta, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – матрица значений высот в точках скользящего окна размера  $25 \times 1$ :

$$\alpha = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{25} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$\beta$  – матрица неизвестных коэффициентов ряда (3) размера  $10 \times 1$ :

$$\beta = \begin{pmatrix} a \\ d \\ b \\ c \\ r \\ t \\ s \\ p \\ q \\ u \end{pmatrix}, \quad (6)$$

и  $\mathbf{F}$  – матрица известных коэффициентов системы уравнений (4) размера  $25 \times 10$ :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix}
 -\frac{4}{3}w^3 & \frac{4}{3}w^3 & 4w^3 & -4w^3 & 2w^2 & 2w^2 & -4w^2 & -2w & 2w & 1 \\
 -\frac{1}{6}w^3 & \frac{4}{3}w^3 & w^3 & -2w^3 & \frac{1}{2}w^2 & 2w^2 & -2w^2 & -w & 2w & 1 \\
 0 & \frac{4}{3}w^3 & 0 & 0 & 0 & 2w^2 & 0 & 0 & 2w & 1 \\
 \frac{1}{6}w^3 & \frac{4}{3}w^3 & w^3 & 2w^3 & \frac{1}{2}w^2 & 2w^2 & 2w^2 & w & 2w & 1 \\
 \frac{4}{3}w^3 & \frac{4}{3}w^3 & 4w^3 & 4w^3 & 2w^2 & 2w^2 & 4w^2 & 2w & 2w & 1 \\
 -\frac{4}{3}w^3 & \frac{1}{6}w^3 & 2w^3 & -w^3 & 2w^2 & \frac{1}{2}w^2 & -2w^2 & -2w & w & 1 \\
 -\frac{1}{6}w^3 & \frac{1}{6}w^3 & \frac{1}{2}w^3 & -\frac{1}{2}w^3 & \frac{1}{2}w^2 & \frac{1}{2}w^2 & -w^2 & -w & w & 1 \\
 0 & \frac{1}{6}w^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}w^2 & 0 & 0 & w & 1 \\
 \frac{1}{6}w^3 & \frac{1}{6}w^3 & \frac{1}{2}w^3 & \frac{1}{2}w^3 & \frac{1}{2}w^2 & \frac{1}{2}w^2 & w^2 & w & w & 1 \\
 \frac{4}{3}w^3 & \frac{1}{6}w^3 & 2w^3 & w^3 & 2w^2 & \frac{1}{2}w^2 & 2w^2 & 2w & w & 1 \\
 -\frac{4}{3}w^3 & 0 & 0 & 0 & 2w^2 & 0 & 0 & -2w & 0 & 1 \\
 -\frac{1}{6}w^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}w^2 & 0 & 0 & -w & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \frac{1}{6}w^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}w^2 & 0 & 0 & w & 0 & 1 \\
 \frac{4}{3}w^3 & 0 & 0 & 0 & 2w^2 & 0 & 0 & 2w & 0 & 1 \\
 -\frac{4}{3}w^3 & -\frac{1}{6}w^3 & -2w^3 & -w^3 & 2w^2 & \frac{1}{2}w^2 & 2w^2 & -2w & -w & 1 \\
 -\frac{1}{6}w^3 & -\frac{1}{6}w^3 & -\frac{1}{2}w^3 & -\frac{1}{2}w^3 & \frac{1}{2}w^2 & \frac{1}{2}w^2 & w^2 & -w & -w & 1 \\
 0 & -\frac{1}{6}w^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}w^2 & 0 & 0 & -w & 1 \\
 \frac{1}{6}w^3 & -\frac{1}{6}w^3 & -\frac{1}{2}w^3 & \frac{1}{2}w^3 & \frac{1}{2}w^2 & \frac{1}{2}w^2 & -w^2 & w & -w & 1 \\
 \frac{4}{3}w^3 & -\frac{1}{6}w^3 & -2w^3 & w^3 & 2w^2 & \frac{1}{2}w^2 & -2w^2 & 2w & -w & 1 \\
 -\frac{4}{3}w^3 & -\frac{4}{3}w^3 & -4w^3 & -4w^3 & 2w^2 & 2w^2 & 4w^2 & -2w & -2w & 1 \\
 -\frac{1}{6}w^3 & -\frac{4}{3}w^3 & -w^3 & -2w^3 & \frac{1}{2}w^2 & 2w^2 & 2w^2 & -w & -2w & 1 \\
 0 & -\frac{4}{3}w^3 & 0 & 0 & 0 & 2w^2 & 0 & 0 & -2w & 1 \\
 \frac{1}{6}w^3 & -\frac{4}{3}w^3 & -w^3 & 2w^3 & \frac{1}{2}w^2 & 2w^2 & -2w^2 & w & -2w & 1 \\
 \frac{4}{3}w^3 & -\frac{4}{3}w^3 & -4w^3 & 4w^3 & 2w^2 & 2w^2 & -4w^2 & 2w & -2w & 1
 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты полинома (3), необходимо решить уравнение

$$\beta = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \alpha, \tag{8}$$

где  $\mathbf{F}^T$  – транспонированная матрица  $\mathbf{F}$ , а  $(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1}$  – матрица, обратная матрице  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ . С помощью матричных операций находим матрицу  $(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T$  размера  $10 \times 25$ :

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{5w^3} & 0 & \frac{1}{5w^3} & \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{5w^3} & 0 \\ \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{5w^3} & \frac{1}{5w^3} & \frac{1}{5w^3} \\ \frac{2}{35w^3} & \frac{1}{35w^3} & \frac{2}{35w^3} & \frac{1}{35w^3} & \frac{2}{35w^3} & \frac{1}{35w^3} & \frac{1}{70w^3} & \frac{1}{35w^3} \\ \frac{2}{35w^3} & \frac{1}{35w^3} & 0 & \frac{1}{35w^3} & \frac{2}{35w^3} & \frac{1}{35w^3} & \frac{1}{70w^3} & 0 \\ \frac{2}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} \\ \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} \\ \frac{1}{25w^2} & \frac{1}{50w^2} & 0 & \frac{1}{50w^2} & \frac{1}{25w^2} & \frac{1}{50w^2} & \frac{1}{100w^2} & 0 \\ \frac{31}{420w} & \frac{11}{105w} & 0 & \frac{11}{105w} & \frac{31}{420w} & \frac{1}{84w} & \frac{31}{210w} & 0 \\ \frac{31}{420w} & \frac{1}{84w} & \frac{17}{420w} & \frac{1}{84w} & \frac{31}{420w} & \frac{11}{105w} & \frac{31}{210w} & \frac{17}{105w} \\ \frac{13}{175} & \frac{2}{175} & \frac{1}{25} & \frac{2}{175} & \frac{13}{175} & \frac{2}{175} & \frac{17}{175} & \frac{22}{175} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5w^3} & \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{5w^3} & 0 & \frac{1}{5w^3} & \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{10w^3} & \frac{1}{5w^3} & 0 \\ \frac{1}{5w^3} & \frac{1}{5w^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5w^3} & \frac{1}{5w^3} & \frac{1}{5w^3} \\ \frac{1}{70w^3} & \frac{1}{35w^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{35w^3} & \frac{1}{70w^3} & \frac{1}{35w^3} \\ \frac{1}{70w^3} & \frac{1}{35w^3} & \frac{2}{35w^3} & \frac{1}{35w^3} & 0 & \frac{1}{35w^3} & \frac{2}{35w^3} & \frac{1}{35w^3} & \frac{1}{70w^3} & 0 \\ \frac{1}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} \\ \frac{1}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{2}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} & \frac{1}{35w^2} \\ \frac{1}{100w^2} & \frac{1}{50w^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{50w^2} & \frac{1}{100w^2} & 0 \\ \frac{31}{210w} & \frac{1}{84w} & \frac{17}{420w} & \frac{17}{105w} & 0 & \frac{17}{105w} & \frac{17}{420w} & \frac{1}{84w} & \frac{31}{210w} & 0 \\ \frac{31}{210w} & \frac{11}{105w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{105w} & \frac{31}{210w} & \frac{17}{105w} \\ \frac{17}{175} & \frac{2}{175} & \frac{1}{25} & \frac{22}{175} & \frac{27}{175} & \frac{22}{175} & \frac{1}{25} & \frac{2}{175} & \frac{17}{175} & \frac{22}{175} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$\frac{1}{5w^3}$	$\frac{1}{10w^3}$	$\frac{1}{10w^3}$	$\frac{1}{5w^3}$	0	$\frac{1}{5w^3}$	$\frac{1}{10w^3}$
$\frac{1}{5w^3}$	$\frac{1}{5w^3}$	$\frac{1}{10w^3}$	$\frac{1}{10w^3}$	$\frac{1}{10w^3}$	$\frac{1}{10w^3}$	$\frac{1}{10w^3}$
$\frac{1}{70w^3}$	$\frac{1}{35w^3}$	$\frac{2}{35w^3}$	$\frac{1}{35w^3}$	$\frac{2}{35w^3}$	$\frac{1}{35w^3}$	$\frac{2}{35w^3}$
$\frac{1}{70w^3}$	$\frac{1}{35w^3}$	$\frac{2}{35w^3}$	$\frac{1}{35w^3}$	0	$\frac{1}{35w^3}$	$\frac{2}{35w^3}$
$\frac{1}{35w^2}$	$\frac{2}{35w^2}$	$\frac{2}{35w^2}$	$\frac{1}{35w^2}$	$\frac{2}{35w^2}$	$\frac{1}{35w^2}$	$\frac{2}{35w^2}$
$\frac{1}{35w^2}$	$\frac{1}{35w^2}$	$\frac{2}{35w^2}$	$\frac{2}{35w^2}$	$\frac{2}{35w^2}$	$\frac{2}{35w^2}$	$\frac{2}{35w^2}$
$\frac{1}{100w^2}$	$\frac{1}{50w^2}$	$\frac{1}{25w^2}$	$\frac{1}{50w^2}$	0	$\frac{1}{50w^2}$	$\frac{1}{25w^2}$
$\frac{31}{210w}$	$\frac{1}{84w}$	$\frac{31}{420w}$	$\frac{11}{105w}$	0	$\frac{11}{105w}$	$\frac{31}{420w}$
$\frac{31}{210w}$	$\frac{11}{105w}$	$\frac{31}{420w}$	$\frac{1}{84w}$	$\frac{17}{420w}$	$\frac{1}{84w}$	$\frac{31}{420w}$
$\frac{17}{175}$	$\frac{2}{175}$	$\frac{13}{175}$	$\frac{2}{175}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{175}$	$\frac{13}{175}$

Решая уравнение (8), получаем следующие выражения для частных производных высоты  $a, d, b, c, r, t, s, p$  и  $q$ :

$$a = \frac{z_5 + z_{10} + z_{15} + z_{20} + z_{25} - z_1 - z_6 - z_{11} - z_{16} - z_{21}}{10w^3} + \frac{2(z_2 + z_7 + z_{12} + z_{17} + z_{22} - z_4 - z_9 - z_{14} - z_{19} - z_{24})}{10w^3}, \quad (10)$$

$$d = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 - z_{21} - z_{22} - z_{23} - z_{24} - z_{25}}{10w^3} + \frac{2(z_{16} + z_{17} + z_{18} + z_{19} + z_{20} - z_6 - z_7 - z_8 - z_9 - z_{10})}{10w^3}, \quad (11)$$

$$b = \frac{z_{17} + z_{19} - z_7 - z_9 + 4(z_1 + z_5 + z_{23} - z_3 - z_{21} - z_{25})}{70w^3} + \frac{2(z_6 + z_{10} + z_{18} + z_{22} + z_{24} - z_2 - z_4 - z_8 - z_{16} - z_{20})}{70w^3}, \quad (12)$$

$$c = \frac{z_7 + z_{17} - z_9 - z_{19} + 4(z_5 + z_{11} + z_{25} - z_1 - z_{15} - z_{21})}{70w^3} + \frac{2(z_4 + z_6 + z_{12} + z_{16} + z_{24} - z_2 - z_{10} - z_{14} - z_{20} - z_{22})}{70w^3}, \quad (13)$$

$$r = \frac{1}{35w^2} [2(z_1 + z_5 + z_6 + z_{10} + z_{11} + z_{15} + z_{16} + z_{20} + z_{21} + z_{25}) - 2(z_3 + z_8 + z_{13} + z_{18} + z_{23}) - z_2 - z_4 - z_7 - z_9 - z_{12} - z_{14} - z_{17} - z_{19} - z_{22} - z_{24}], \quad (14)$$

$$t = \frac{1}{35w^2} [2(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_{21} + z_{22} + z_{23} + z_{24} + z_{25}) - 2(z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{15}) - z_6 - z_7 - z_8 - z_9 - z_{10} - z_{16} - z_{17} - z_{18} - z_{19} - z_{20}], \quad (15)$$

$$s = \frac{1}{100w^2} [z_9 + z_{17} - z_7 - z_{19} + 4(z_5 + z_{21} - z_1 - z_{25}) + 2(z_4 + z_{10} + z_{16} + z_{22} - z_2 - z_6 - z_{20} - z_{24})], \quad (16)$$

$$p = \frac{1}{420w} \{ 44(z_4 + z_{24} - z_2 - z_{22}) + 31[z_1 + z_{21} - z_5 - z_{25} + 2(z_9 + z_{19} - z_7 - z_{17})] + 17[z_{15} - z_{11} + 4(z_{14} - z_{12})] + 5(z_{10} + z_{20} - z_6 - z_{16}) \}, \quad (17)$$

$$q = \frac{1}{420w} \{ 44(z_6 + z_{10} - z_{16} - z_{20}) + 31[z_{21} + z_{25} - z_1 - z_5 + 2(z_7 + z_9 - z_{17} - z_{19})] + 17[z_3 - z_{23} + 4(z_8 - z_{18})] + 5(z_2 + z_4 - z_{22} - z_{24}) \}. \quad (18)$$

Как и в методе Эванса, в нашем случае полином третьего порядка (3) приближается к значениям высот в точках скользящего окна  $5 \times 5$ , а не проходит строго через них. Это ведет к локальному подавлению шума и может оптимизировать расчет частных производных, так как они весьма чувствительны к высокочастотной компоненте сигнала [16].

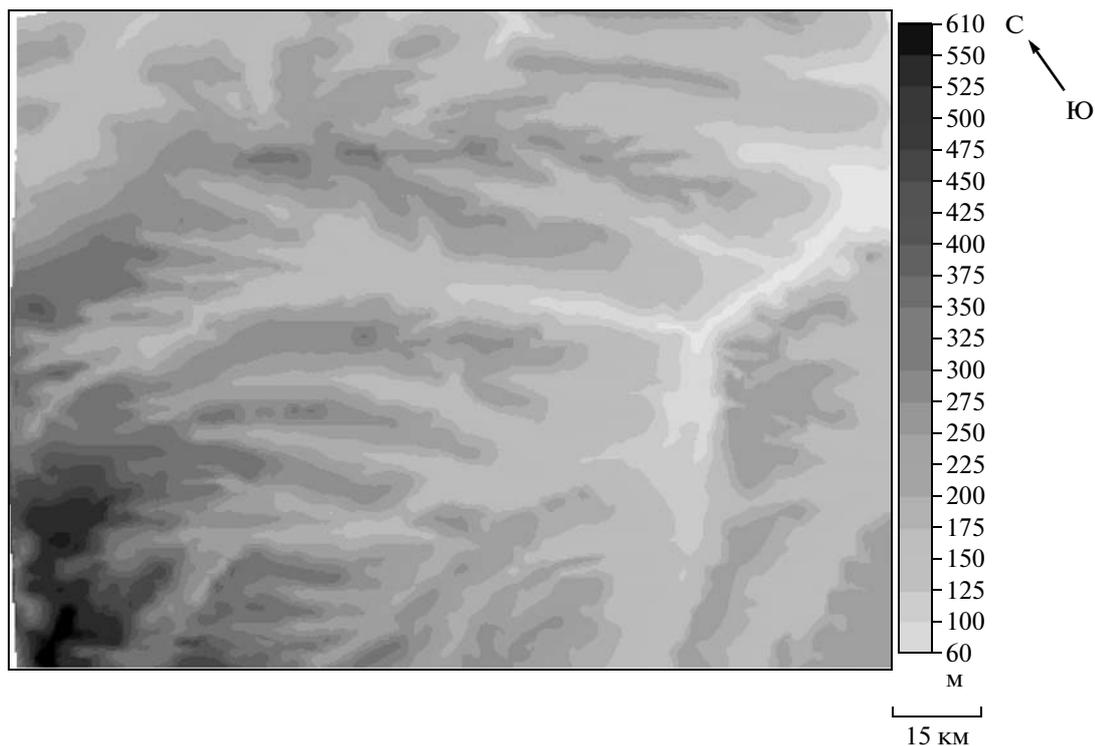


Рис. 2. Среднее течение р. Кумы, карта высот.

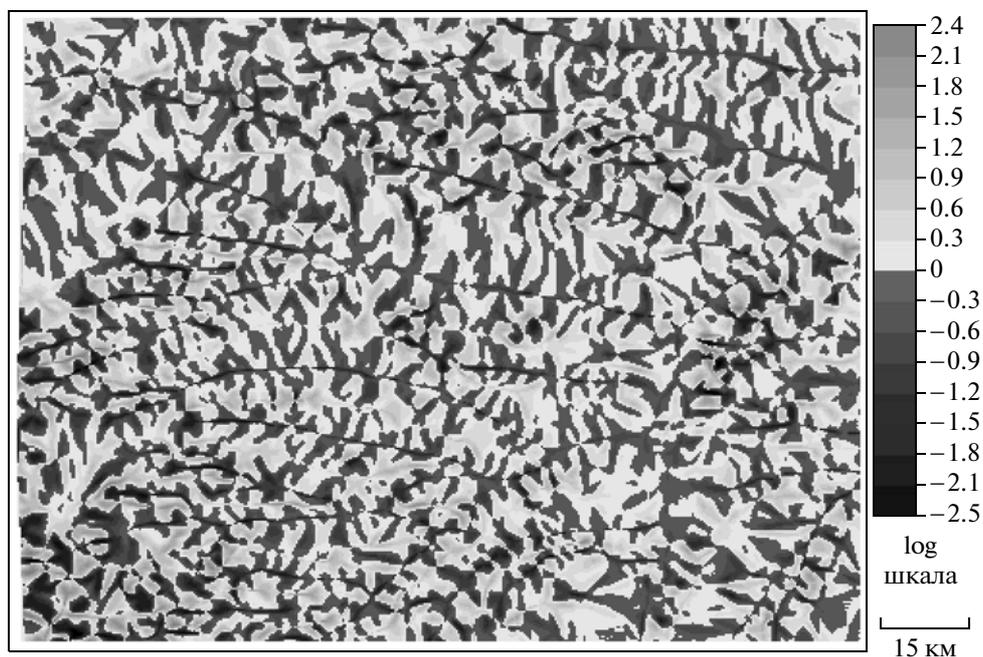
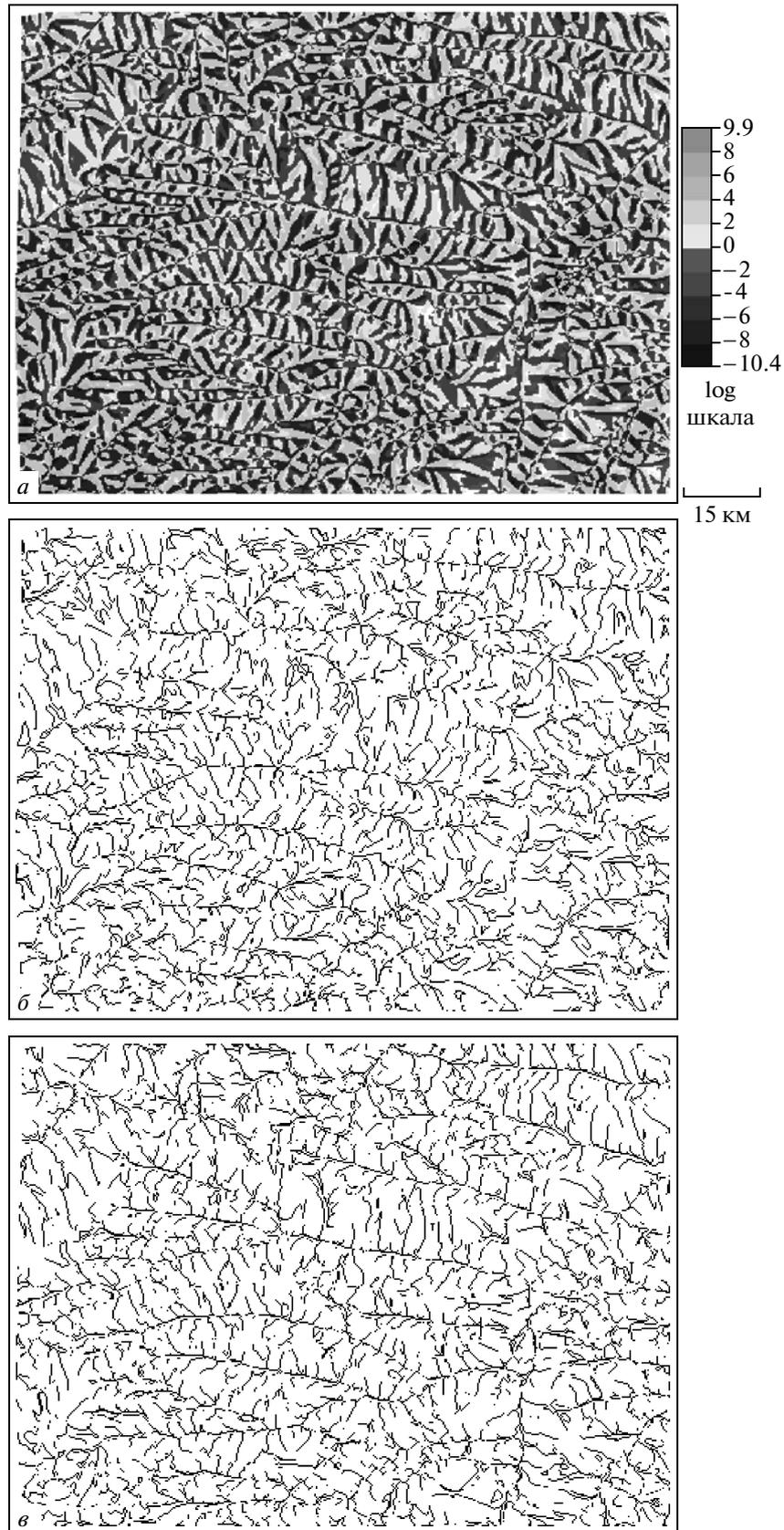


Рис. 3. Среднее течение р. Кумы, карта горизонтальной кривизны.

Здесь не приводится формула остаточного члена  $u$  ряда (3), так как он не используется при расчете  $T(1)$ . При выводе формул (10–18) использовалась программа Maple V Release 5.0 (© Waterloo Maple Inc., 1981–1997).

#### ПРИМЕР РАСЧЕТА ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ПО ЦМВ

Для выделения структурных линий рельефа с помощью производящей функции могут исполь-



**Рис. 4.** Среднее течение р. Кумы, карты производящей функции: *a* – производящая функция; *б* – нулевые значения производящей функции в пределах областей дивергенции (водоразделы и бровки); *в* – нулевые значения производящей функции в пределах областей конвергенции (талъвеги и подошвы).

зываются ЦМВ, полученные на основе данных дистанционного зондирования (например, SRTM, ASTER) и топографических карт. В качестве иллюстрации рассмотрим фрагмент ЦМВ междуречья рек Кумы и Калауса (рис. 2). Нерегулярная ЦМВ получена с помощью оцифровки топографической карты М 1 : 1000000 [16]. Фрагмент ЦМВ с размерами около 133 × 100 км включает 2571 точку. С помощью триангуляции Делоне и гладкой интерполяции кусочными полиномами [17] была получена регулярная ЦМВ с шагом 300 м. Для подавления высокочастотного шума ЦМВ была трижды сглажена с использованием скользящего окна 3 × 3.

По сглаженной ЦМВ методом Эванса [13] была рассчитана цифровая модель  $k_h$  (рис. 3). Определение и формула  $k_h$  неоднократно публиковались ранее [8, 9]. По сглаженной ЦМВ, с применением выведенных формул (10–18), была рассчитана цифровая модель производящей функции (рис. 4а). Модели морфометрических характеристик имеют разрешение 300 м.

Чтобы избежать потери информации о пространственном распределении значений  $k_h$  и производящей функции, при картографировании (рис. 3, 4а) было применено логарифмическое трансформирование их значений:

$$\begin{aligned} T' &= \text{sign}(T) \ln(1 + 10^5 |T|), \\ k_h' &= \text{sign}(k_h) \ln(1 + 10^5 |k_h|). \end{aligned} \quad (19)$$

Такая форма трансформирования [9] учитывает, что динамический диапазон  $k_h$  и  $T$  включает как положительные, так и отрицательные значения. Расчеты и картографирование осуществлены с помощью программы LandLord 4.0 [18].

Положительные значения  $k_h$  (светлые области на карте) соответствуют зонам дивергенции потоков, отрицательные значения  $k_h$  (темные области) соответствуют зонам конвергенции (рис. 3). Нулевые значения  $T$  отображают все линии экстремальной кривизны земной поверхности в пределах рассматриваемого участка (рис. 4а). При местном анализе цифровых моделей  $T$  (рис. 4а) и  $k_h$  (рис. 3), выделенные структурные линии могут быть разделены на две категории. На карте значений  $T = 0$ , расположенных в пределах областей дивергенции ( $k_h > 0$ ), отображаются линии положительной экстремальной кривизны поверхности, т.е. водоразделы и бровки (рис. 4б). На карте значений  $T = 0$ , расположенных в пределах областей конвергенции ( $k_h < 0$ ), выделяются линии отрицательной экстремальной кривизны земной поверхности: тальвеги и подошвы (рис. 4в). Разрывы в выделенных структурных линиях (рис. 4б, в) вызваны остаточным шумом в ЦМВ, а также соответствуют плоским участкам.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дается вывод формул для расчета третьих частных производных высоты по ЦМВ, заданной на квадратной сетке. Результаты эксперимента показали, что цифровые модели производящей функции могут применяться для выделения структурных линий рельефа. Для получения читаемых карт  $T$  ключевой процедурой является предварительное сглаживание ЦМВ для подавления высокочастотного шума. В ходе дальнейших исследований необходимо определить количественный критерий для различения: а – водоразделов и бровок, которые являются множеством точек  $T = 0$  при  $k_h > 0$ , и б – тальвегов и подошв, отвечающих множеству точек  $T = 0$  при  $k_h < 0$ . Выведенные формулы могут быть использованы не только при анализе ЦМВ, но и при обработке дистанционных изображений земной поверхности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O'Callaghan J.F., Mark D.M. The extraction of drainage networks from digital elevation data // *Comp. Vision, Graphics, and Im. Proc.* 1984. V. 28. № 3. P. 323–344.
2. Eliason J.R., Eliason V.L.C. Process for structural geologic analysis of topography and point data. US Patent № 4698759, 1987, G 01V 3/18 (364/420). 107 p.
3. Riazanoff S., Cervelle B., Chorowicz J. Ridge and valley line extraction from digital terrain models // *Int. J. Rem. Sens.* 1988. V. 9. № 6. P. 1175–1183.
4. Skidmore A.K. Terrain position as mapped from a gridded digital elevation model // *Int. J. Geogr. Inform. Syst.* 1990. V. 4. № 1. P. 33–49.
5. Tribe A. Automated recognition of valley lines and drainage networks from grid digital elevation models: a review and a new method // *J. Hydrol.* 1992. V. 139. № 1–2. P. 263–293.
6. Meisels A., Raizman S., Karnieli A. Skeletonizing a DEM into a drainage network // *Comp. and Geosci.* 1995. V. 21. № 1. P. 187–196.
7. Chang Y.-C., Song G.-S., Hsu S.-K. Automatic extraction of ridge and valley axes using the profile recognition and polygon-breaking algorithm // *Comp. and Geosci.* 1998. V. 24. № 1. P. 83–93.
8. Florinsky I.V. Combined analysis of digital terrain models and remotely sensed data in landscape investigations // *Progr. in Phys. Geogr.* 1998. V. 22. № 1. P. 33–60.
9. Shary P.A., Sharaya L.S., Mitusov A.V. Fundamental quantitative methods of land surface analysis // *Geoderma.* 2002. V. 107. № 1–2. P. 1–32.
10. Шарый П.А., Степанов И.Н. О методе вторых производных в геологии // *Докл. АН СССР.* 1991. Т. 319. № 2. С. 456–460.
11. Florinsky I.V. Accuracy of local topographic variables derived from digital elevation models // *Int. J. Geogr. Inf. Sci.* 1998. V. 12. № 1. P. 47–61.
12. Schmidt J., Evans I.S., Brinkmann J. Comparison of polynomial models for land surface curvature calcula-

- tion // *Int. J. of Geogr. Inf. Sci.* 2003. V. 17. № 8. P. 797–814.
13. *Evans I.S.* An Integrated System of Terrain Analysis and Slope Mapping. Final Report on Grant DA-ERO-591-73-G0040. Durham: University of Durham, 1979. 192 p.
  14. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. 1. Изд. 6. 607 с.
  15. *Bjerhammar A.* Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses. Amsterdam: Elsevier, 1973. 420 p.
  16. *Florinsky I.V.* Errors of signal processing in digital terrain modelling // *Int. J. Geogr. Inf. Sci.* 2002. V. 16. № 5. P. 475–501.
  17. *Watson D.* Contouring: A Guide to the Analysis and Display of Spatial Data. Oxford: Pergamon Press, 1992. 340 p.
  18. *Флоринский И.В., Грохлина Т.И., Михайлова Н.Л.* LANDLORD 2.0: система анализа и картографирования геометрических характеристик рельефа // *Геодезия и картография.* 1995. № 5. С. 46–51.

## **Estimating Derivation Function of Elevation to Detect Topographic Lines of Extremal Curvature Using Remotely Sensed Data and Topographic Maps**

**I. V. Florinsky**

*Institute of Mathematical Problems of Biology, Russian Academy of Sciences, Pushchino*

Delineation of lines of extremal curvature of the topographic surface (e.g. ridge and valley lines) is one of the key steps in solving various practical and fundamental tasks of geomorphology, geology, and related disciplines. These lines can be analytically described by the derivation function of elevation depending on the first-, second-, and third-order partial derivatives of elevation. In this paper, we present the development of formulae to estimate the third-order partial derivatives of elevation from a square-gridded digital elevation model. A test for computation of a digital model of the derivation function is carried out.