Доклады Академии наук СССР
1961. Том 136, № 5

МАТЕМАТИКА

А. М. МОЛЧАНОВ

РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 16 IX 1960)

В настоящее время наиболее эффективным приемом в ассимптотической теории нелинейных колебаний является метод усреднения ([1]). В предлагаемой заметке обсуждается возможность иной точки зрения на асимптотические методы — точки зрения разделения движений на быстрое и медленное (эволюционное). Как будет показано, метод усреднения, а также идейно примыкающий к нему прием исследования систем с быстро вращающимися фазами ([1,2]) являются частными случаями метода разделения движений.

Переходя к формулировке идеи разделения движений, рассмотрим параллельно системы уравнений невозмущенного движения

$$du / dt = U(u) \tag{1}$$

и возмущенного движения

$$dv / dt = U(v) + V(v), \tag{2}$$

где возмущающая функция V допускает асимптотическое разложение по степеням малого параметра $V(\varepsilon, v) = \varepsilon V_1(v) + \varepsilon^2 V_2(v) + \ldots$ Обозначим

$$u = u(w, t) \tag{3}$$

решение системы (1), удовлетворяющее начальным данным $u|_{t=0} = u(w, 0) = w$.

Нетрудно показать, что решение уравнения (2) также можно записать в виде (3), но тогда нужно считать, что w не постоянно, а зависит от t — прием, аналогичный методу вариации произвольных постоянных в линейных уравнениях. Получающееся при этом уравнение для w, вообще говоря, явно содержит время. В линейном случае, в частности, могут появиться секулярные члены. Ясно, что исследование существенно упрощается, если для w получается автономное, т. е. не содержащее явно времени, уравнение. Это уравнение естественно назвать эволюционным, ибо оно описывает медленные изменения системы, не зависящие от ее основного, быстрого движения. Про систему (2) в этом случае будем говорить, что она допускает разделение движений.

Системы, допускающие разделение движений, играют среди общих систем вида (2) роль, аналогичную роли диагональных систем среди линейных. Подобно тому как систему линейных уравнений линейной заменой переменных можно привести к диагональной форме, нелинейную систему (2) можно нелинейной заменой переменных привести к форме, допускающей разделение движений. Исключением является случай вырождения, соответствующий случаю жордановой формы в линейных уравнениях.

Наша ближайшая цель — отыскание условий, при которых система допускает разделение движений. Подставляя (3) в (2), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\delta u}{\delta w}\frac{dw}{dt}=U(u)+V(u).$$

Здесь и дальше символ $\delta u/\delta w$ и аналогичные ему означают матрицу, элементы которой суть частные производные компонент вектора u по компонентам вектора w. По определению функции $u(w, t)$, ее частная производная по t равна $U(u)$. Поэтому первые члены в обеих частях равенства взаимно уничтожаются, и после умножения на $(\delta u/\delta w)^{-1}$ слева получаем:

$$dw/dt=W(w, t), \tag{4}$$

где введено обозначение

$$W=(\delta u/\delta w)^{-1}V. \tag{5}$$

По определению систем, допускающих разделение движений, правая часть в (4) не должна содержать явно время. Несложные выкладки показывают, что

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\left(\frac{\delta u}{\delta w}\right)^{-1}\left[\frac{\delta V}{\delta u}U-\frac{\delta U}{\delta u}V\right]. \tag{6}$$

Поэтому необходимым и достаточным условием разделения движений является равенство

$$\frac{\delta V}{\delta u}U-\frac{\delta U}{\delta u}V=0. \tag{7}$$

Если оно выполнено, то решение уравнения (2) дается формулой

$$v=u(w(t), t), \tag{8}$$

где $w(t)$ — решение уравнения (4), которое в этом случае приобретает вид

$$dw/dt=V(w). \tag{9}$$

Это сразу получается из равенства (5) при $t=0$, ибо тогда $\delta u/\delta w=E$. Но так как W не зависит от t, то равенство $W=V(W)$ имеет место тождественно.

Таким образом, при выполнении условия (7) для решения уравнения (2) достаточно независимо решить уравнения (1) и (9), а затем в решение одного из этих уравнений (любого ввиду полной симметрии условия (7)) подставить вместо начальных данных (см. (8)) решение другого уравнения. Это обстоятельство представляется достаточным оправданием для введения термина «разделение движений». Заметим, что если U и V— линейные функции своего аргумента, то условие (7) есть просто условие перестановочности матриц U и V. Поэтому левая часть условия (7) является естественным обобщением понятия коммутатора на случай нелинейных операторов.

Перейдем к доказательству того факта, что заменой переменных систему (2) можно привести к форме, допускающей разделение движений. Если до сих пор малость параметра ε не играла никакой роли, то теперь она приобретает решающее значение. А именно, будет доказано существование асимптотического ряда $y=v+\varepsilon Q_1(v)+\varepsilon^2Q_2(v)+\ldots$ такого, что уравнение для y уже допускает разделение движений. Несложные, но громоздкие выкладки показывают, что для y получается уравнение, аналогичное уравнению для v, с тем же, как и следовало ожидать, главным членом:

$$dy/dt=U(y)+\varepsilon Y_1(y)+\varepsilon^2Y_2(y)+\ldots \tag{10}$$

Можно проверить, что коэффициент Q_n, подлежащий определению, входит в Y_n следующим образом:

$$Y_n=\widetilde{Y}_n+\frac{\delta Q_n}{\delta y}U-\frac{\delta U}{\delta y}Q_n, \tag{11}$$

где $\widetilde{Y}_n$, кроме заданных функций $V_1, \ldots, V_n$, зависит только от предыдущих $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$. $\widetilde{Y}_1$, в частности, есть просто $V_1(y)$. Поэтому при отыскании очередного Q_n $\widetilde{Y}_n$ может рассматриваться как известная функция от y. Коэффициенты Q_n мы должны подобрать так, чтобы уравнение (10) допускало разделение движений. Как мы видели выше, это равносильно требованию, чтобы функции Y_n коммутировали с U в смысле условия (7). Вводя обозначение

$$\mathscr{L}_U(Y) = \frac{\delta Y}{\delta u} U - \frac{\delta U}{\delta u} Y, \tag{12}$$

мы видим, что задача определения Q_n сводится к задаче разложения известной функции $\widetilde{Y}_n$ в сумму двух слагаемых, одно из которых принадлежит области значений линейного оператора $\mathscr{L}_U$, а другое аннулируется этим оператором

$$\widetilde{Y}_n = -\mathscr{L}_U(Q_n) + Y_n, \quad \mathscr{L}_U(Y_n) = 0. \tag{13}$$

Строго говоря, выражение (12) еще не является оператором, ибо для полного задания оператора необходимо указать его область определения. Выбор области определения диктуется набором функций $\widetilde{Y}_n$, которые необходимо разлагать в сумму (13). Если этот выбор так или иначе произведен, вопрос о возможности разложения (13) сводится к вопросу об отсутствии у оператора $\mathscr{L}_U$ жордановой клетки, соответствующей нулевому собственному значению. Мы не будем сейчас обсуждать возможность вырождения, а перейдем к рассмотрению одного практически важного случая, в котором можно не только доказать существование разложения, но и фактически построить его.

Это построение основано на другой интерпретации разложения (13) — интерпретации, получающейся следующим образом. Формула (5) с каждой функцией $V(u)$ однозначно связывает функцию от w и t, являющуюся результатом параллельного переноса $V(u)$ вдоль траекторий невозмущенного движения $u(w, t)$. Разложение (13) порождает среди таких функций разложение, допускающее очень простое истолкование. Это есть разложение любой функции вида (5) в сумму двух: функции, интегрируемой вдоль траекторий (т. е. представимой в виде частной производной по t от функций того же вида), и функции, не меняющейся при сдвиге вдоль траектории. Такое истолкование непосредственно вытекает из формул (5), (6) и (13). Заметим, что в силу тех же формул, а также вытекающего из (3) при $t = 0$ равенства $\delta u/\delta w = E$, разложение функций вида (5) дает при подстановке $t = 0$ разложение (13).

Разобранная интерпретация является общей и годится всегда, а в одном важном для приложений частном случае она непосредственно приводит к эффективному решению вопроса. Это случай, когда сдвиг $\widetilde{Y}_n$ вдоль траекторий порождает почти периодическую функцию t, частоты которой не накапливаются к нулю. (Дальше имеются в виду именно такие функции.) Тогда задача сводится просто к выделению из функции ее среднего значения, так как нетрудно проверить, что равенство нулю среднего значения есть необходимое и достаточное условие интегрируемости (в смысле сохранения принадлежности к классу) таких функций. Поэтому разложение функции на постоянную и функцию с нулевым средним значением совпадает с нужным нам разложением. Не касаясь деталей выкладок, приведем окончательный результат (в нижеследующих формулах $u = u(w, t)$, а интегрирование по t происходит вдоль траектории, т. е. при фиксированном w):

$$Y_n(w) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\delta u}{\delta w}\right)^{-1} \widetilde{Y}_n(u)\, dt, \tag{14}$$

$$Q_n(w) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (T - t) \left(\frac{\delta u}{\delta w}\right)^{-1} [\widetilde{Y}_n(u) - Y_n(u)]\, dt. \qquad (15)$$

Полученные формулы несколько упрощаются, если $\widetilde{Y}_n$ оказывается периодической функцией t. В этом случае достаточно, очевидно, брать среднее по периоду T, даже если этот период зависит от w.

Заметим, что неоднозначность в выборе Q_n (ибо к Q_n можно добавить любое слагаемое Q'_n, для которого $\mathscr{L}_U(Q'_n) = 0$) устранена в формуле (15) требованием, чтобы среднее от Q_n равнялось нулю. Этот произвол, не существенный для построения асимптотической теории, может иметь важное значение при исследовании сходимости асимптотических рядов. Такой способ построения Q_n может оказаться не самым удачным, хотя на первый взгляд он наиболее способствует сходимости ряда для y.

Второе замечание касается того обстоятельства, что вывод формул (14) и (15) опирался на факт почти периодичности по t подынтегрального выражения. Множитель $(\delta u/\delta w)^{-1}$ может не быть почти периодичным в случае быстро вращающихся фаз. Некоторое видоизменение вывода приводит в этом случае к формулам, аналогичным (14) и (15).

Наконец, третье замечание относится к возможности обобщения формул усреднения на непериодический случай при помощи аналитического продолжения $u(w, t)$ на комплексные значения t, так что интегрирование происходит по некоторой кривой в комплексной области, вдоль которой имеют смысл средние значения. Так, например, если $U(u)$ — линейный оператор с действительными собственными значениями, то формулы (14) и (15) дают искомое разложение при интегрировании вдоль мнимой оси t. Интересно было бы выяснить, является ли такое обобщение иллюзорным, или оно существенно расширяет круг задач (13), допускающих решение при помощи формул типа (14), (15). Пример функции $\operatorname{sh} t + \sin t$ является мало обнадеживающим в этом смысле.

Интересно поэтому попытаться найти прямые подходы к решению задачи разложения. К обсуждению одной из таких возможностей мы и переходим. Уравнения невозмущенного движения выглядят наиболее просто, если в качестве новых неизвестных выбрать систему первых интегралов уравнения (1). Но так как число первых интегралов на единицу меньше порядка системы, то к ним нужно присоединить еще одну независимую функцию, которую естественно называть фазовой переменной. Такие переменные во всяком случае можно выбрать в окрестности любой регулярной точки уравнения (1). Нетрудно проверить, что в этих переменных задача разложения приводит к уравнениям, допускающим интегрирование в квадратурах. Получающееся решение содержит, конечно, произвольные функции. Формально говоря, разделение движений имеет место при любом выборе этих функций. Однако эффективность асимптотического разложения существенно зависит от ограниченности коэффициентов. Требование ограниченности коэффициентов позволяет в некоторых случаях устранить произвол в выборе решения. Недостаток места не дает возможности в данной заметке более подробно обсудить этот интересный вопрос, связанный, вероятно, с вопросами сходимости асимптотических разложений.

Поступило
9 IX 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов, Ю. Л. Митропольский, Асимптотические методы теории нелинейных колебаний, 1958. [2] В. М. Волосов, ДАН, 133, № 2 (1960).