Доклады Академии наук СССР
1961. Том 141, № 1

МАТЕМАТИКА

А. М. МОЛЧАНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ В СЛУЧАЕ НЕЙТРАЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 2 VI 1961)

Как известно, линеаризация является основным приемом изучения устойчивости особой точки системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Линеаризованная система разбивается, вообще говоря, на три компоненты: устойчивую, нейтральную и неустойчивую. Если неустойчивая компонента есть, то вопрос об устойчивости решается отрицательно, независимо от остальных компонент. При наличии одной только устойчивой компоненты исходная система оказывается устойчивой. Доказательство этого утверждения составляет предмет теории устойчивости Ляпунова. Вопрос остается открытым, если, кроме устойчивой, есть еще и нейтральная компонента. Целью настоящей заметки является установление критерия устойчивости именно для этого последнего случая.

Без ограничения общности можно считать, что есть только нейтральная компонента, так как общий случай сводится к этому, более простому, следующим несложным приемом. Положим в исходной системе равными нулю все переменные, принадлежащие устойчивой компоненте. Получится «урезанная» система, имеющая только нейтральную компоненту. Можно показать, что если «урезанная» система окажется устойчивой, то исходная система также устойчива. Основная трудность изучения систем с нейтральной компонентой состоит в том, что движение вблизи особой точки оказывается в главном члене почти периодическим, а устойчивость или неустойчивость проявляются только в следующих приближениях.

Поэтому для выяснения вопроса об устойчивости нужно провести разделение движения ([1]) и исключить основное движение. Пусть изучаемая система имеет вид

$$\frac{du}{dt} = U(u), \tag{1}$$

и предположим, что $u = u_0 \equiv \text{const}$ есть решение системы (1). Перенося начало координат в точку u_0, $u = u_0 + \varepsilon x$, рассмотрим малые значения параметра ε, что соответствует малой окрестности u_0 в исходных переменных. Система (1) в новых переменных имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A(x) + \varepsilon A_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} A_2(x) + \ldots \tag{2}$$

Здесь $A, A_1, A_2, \ldots$ — однородные многочлены соответственно первой, второй, третьей и т. д. степеней. Согласно основному предположению матрица A имеет чисто мнимые собственные значения. Применим схему разделения движений к системе (2). Это значит, что нужно ввести замену переменных

$$y = x + \varepsilon Q_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} Q_2(x) + \ldots \tag{3}$$

так, чтобы новая система

$$\frac{dy}{dt} = A(y) + \varepsilon B_1(y) + \frac{\varepsilon^2}{2!} B_2(y) + \ldots \tag{4}$$

допускала разделение движений. В ([1]) показано, что функции Q_n и B_n вычисляются по формулам

$$B_n(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} C_n(f)\, dt, \tag{5}$$

$$Q_n(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (T-t) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} [C_n(f) - B_n(f)]\, dt. \tag{6}$$

В этих формулах $f = f(y, t)$ — решение невозмущенного уравнения $\partial f/\partial t = A(f)$, удовлетворяющее начальным данным $f(y, 0) = y$. Функции C_n вычисляются по известным уже B_{n-1}, Q_{n-1}. Например, $C_1(x) = A_1(x)$, $C_2(x) = A_2(x) + 2\left[\frac{dQ_1}{dx} A_1 - \frac{dB_1}{dx} Q_1\right] - \frac{d^2A}{dx^2} Q_1 Q_1$ и т. д. Нетрудно проверить, что в нашем случае, когда A_n — однородный многочлен степени $(n+1)$, функции C_n, B_n, Q_n также однородные многочлены своих аргументов степени $(n+1)$.

Основной интерес для нас представляют функции $B_n(y)$, так как именно они определяют устойчивость системы. Наиболее простой вид эти функции приобретают тогда, когда матрица A диагональна. Так как матрица A согласно условию имеет чисто мнимые собственные значения, то и переменные и коэффициенты уравнений приходится считать комплексными числами. Коэффициенты не являются, конечно, произвольными комплексными числами, ибо система получена из действительной системы. Если обозначить через $x^{\alpha*}$ переменное, комплексно сопряженное с x^α, то легко видеть, что коэффициенты удовлетворяют условиям типа $A^{\alpha*}_{\beta*\gamma*} = \overline{A^{\alpha}_{\beta\gamma}}$. Для коэффициентов многочленов B, C и Q имеют место аналогичные равенства.

Обозначим $i\omega_\alpha$ собственные значения матрицы A и заметим, что

$$\omega_{\alpha*} = -\omega_\alpha. \tag{7}$$

Для диагональной матрицы выкладки в формуле (5) нетрудно провести до конца. Действительно, в этом случае решение $f(y, t)$ имеет вид $f^\alpha = y^\alpha \exp(i\omega_\alpha t)$. Подставляя в (5), получаем, что $B_{\beta\gamma} y^\beta y^\gamma = C^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta y^\gamma \times$ $\times \lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T e^{it(\omega_\beta + \omega_\gamma - \omega_\alpha)} dt$. Но получившийся предел отличен от нуля (и равен единице) только в том случае, если выполнено равенство

$$\omega_\alpha - (\omega_\beta + \omega_\gamma) = 0, \tag{8}$$

которое естественно назвать условием внутреннего резонанса второго порядка.

Совершенно аналогично при вычислении B_2, останутся только те члены, для которых имеет место резонанс третьего порядка

$$\omega_\alpha - (\omega_\beta + \omega_\gamma + \omega_\delta) = 0. \tag{9}$$

Заметим, что в любой системе обязательно есть резонанс третьего порядка. Действительно, положив $\beta = \alpha$, $\delta = \gamma^*$, мы видим, что (9) вытекает из (7). Иное дело резонанс второго порядка — как правило он отсутствует. Более точно этот важный вывод можно сформулировать следующим образом.

Рассмотрим систему, содержащую параметр. В этом случае основные частоты системы ω_α, а следовательно, и комбинационные частоты $\omega_{\alpha\beta\gamma}$, $\omega_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (левые части равенств (8) и (9)) будут функциями этого параметра. Некоторые из комбинационных частот, а именно $\omega_{\alpha\alpha\gamma\gamma*}$, равны нулю при всех зна-

чениях параметра. Это тождественный резонанс третьего порядка. Другие, в частности $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ — частоты второго порядка, обращаются в нуль только в отдельных точках, определяя критические значения параметра. Весьма интересный вопрос о прохождении системой такого критического состояния (в частности нулевого корня матрицы A, когда (8) вытекает из (7)) здесь не рассматривается. Настоящая заметка посвящена разбору общего случая, когда в системе нет никаких резонансов, кроме тождественного. Тогда дело сводится к изучению системы уравнений вида (суммирование производится только по индексу α):

$$\frac{d\eta^k}{dt} = -\eta^k (E_{k\alpha}\eta^\alpha), \tag{10}$$

где $E_{\alpha\beta} = -\frac{\varepsilon^2}{2!}(B^{\alpha}_{\alpha\beta\beta^*} + B^{\alpha^*}_{\alpha^*\beta\beta^*})$. Эта система получается из (4), если вместо y^k ввести новые переменные η^k по формуле $\eta^k = |y^k|^2 = y^k y^{k*}$, и имеет вдвое меньше уравнений, чем (4). Вопрос об устойчивости системы (4) сводится таким образом к вопросу об устойчивости системы (10) в конусе $\eta^k \geqslant 0$.

Отметим в этой связи одно существенное свойство системы (10). Если какое-нибудь переменное η^k равно нулю при $t = t_0$, то оно равно нулю тождественно, что легко следует из вида системы (10). Поэтому, в частности, любое переменное сохраняет знак при всех значениях t. Если положить равными нулю все переменные, кроме одного, то нетрудно получить необходимое условие устойчивости

$$E_{kk} > 0. \tag{11}$$

Положительная определенность симметрической части матрицы $\varepsilon_{\alpha\beta}$,

$$\left(\left(\frac{E_{\alpha\beta} + E_{\beta\alpha}}{2}\right)\right) > 0 \tag{12}$$

является самым простым достаточным условием устойчивости. Это утверждение легко проверить, складывая все уравнения системы (10).

Перейдем к установлению необходимых и достаточных условий. Важную роль в формулировке критерия устойчивости, так же как и для линейных уравнений, играют инвариантные лучи системы, т. е. решения вида $\eta^k = \eta^k_0 \eta(t)$. Подставляя эти выражения в (10), имеем

$$\frac{d\eta}{dt} = -E\eta^2, \quad \eta(0) = 1, \tag{13}$$

$$\eta^k_0 [E_{k\alpha}\eta^\alpha_0 - E] = 0. \tag{14}$$

Здесь E — параметр, аналогичный собственному значению в линейных системах. Однако величина этого параметра, ввиду его пропорциональности длине вектора начальных данных η^α_0, никакого значения не имеет. Важен знак E, который, как это видно из уравнения (13), определяет устойчивость.

Способ отыскания всех инвариантных лучей системы (10) подсказывается видом системы (14). Оставим сначала в каждом из уравнений только второй множитель. Получается основная система линейных уравнений

$$E_{k\alpha}\eta^\alpha_0 = E. \tag{15}$$

Если матрица $E_{\alpha\beta}$ не вырождена, то при любом значении параметра E система (15) имеет единственное решение. Эти решения заполняют инвариантную прямую, состоящую из двух лучей — устойчивого ($E > 0$) и неустойчивого ($E < 0$). Если же матрица вырождена, то решение существует только при $E = 0$, и тогда оно определено с точностью до пропорциональности. Снова имеем инвариантную прямую, на этот раз нейтральную. Все решения нелинейной системы (14) можно получить, оставляя в каждом из уравнений либо первый, либо второй множитель. Всего получается, следовательно, 2^n решений, включая разобранное выше и тождественное: $\eta^k = 0$. Легко

видеть, что эта процедура соответствует независимому изучению системы (10) на всевозможных гранях конуса $\eta^k \geqslant 0$. Понятие инвариантного луча позволяет сформулировать

Критерий устойчивости. *Для того чтобы система* (10) *была устойчива в конусе* $\eta^k \geqslant 0$, *необходимо и достаточно, чтобы внутри и на границе конуса не было ни одного нейтрального или неустойчивого луча.*

Необходимость очевидна.

Достаточность доказывается, так же как и в линейных системах, построением функции Ляпунова. Укажем руководящую идею этого построения. Перепишем систему (10) в виде $d \ln \eta^k / dt = -E_{k\alpha}\eta^\alpha$. Умножим теперь обе части каждого из уравнений на z_k и сложим все n уравнений. Получится соотношение

$$\frac{d \ln \Phi}{dt} = -\Psi. \tag{16}$$

Здесь введены обозначения:

$$\ln \Phi = \sum_k z_k \ln \eta^k, \qquad \Psi = \sum_\alpha \zeta_\alpha \eta^\alpha, \qquad \zeta_\alpha = \sum_k E_{k\alpha} z^k.$$

Можно показать, что при выполнении условий критерия существуют положительные z^k, которым соответствуют положительные же ζ_α. Получающаяся функция Φ не может служить функцией Ляпунова только из-за того, что обращается в нуль на гранях положительного конуса. Этот дефект можно исправить, прибавляя к Φ (с достаточно малым весом, чтобы не испортить отрицательную определенность производной) функции Ляпунова граней. Существование функций Ляпунова меньших размерностей мы предполагаем (по индукции) доказанным.

В заключение разберем ([2]) системы четырех уравнений (две степени свободы в теории колебаний). Уравнения (10) допускают в этом случае интегрирование в квадратурах. Изменением масштабов можно добиться того, чтобы $E_{11} = 1$, $E_{22} = 1$. Поэтому такие системы образуют двухпараметрическое семейство и их можно изображать точками на плоскости (α, β), где $\alpha = E_{12}$, $\beta = E_{21}$.

Нетрудно проверить, что неустойчивые системы лежат ниже отрицательной ветви гиперболы $\alpha\beta - 1 = 0$. Выше прямой $\alpha + \beta + 2 = 0$ находится область монотонной устойчивости. Между этими линиями расположены формально устойчивые системы, решения которых могут, однако, возрастать перед тем как начать затухать. Степень «раскачки» в таких системах (т. е. возможное первоначальное нарастание амплитуды колебаний) грубо оценивается числом $|\alpha| + |\beta|$. Ясно, что при большой «раскачке» такие системы могут оказаться практически неустойчивыми.

Для систем с двумя частотами нетрудно непосредственно построить линейную по переменным η_1, η_2 функцию Ляпунова. Поэтому они, наравне с одночастотными системами, могут служить отправным пунктом доказательства по индукции для общих систем.

Поступило
23 V 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Молчанов, ДАН, 136, № 5 (1961). [2] И. Г. Малкин. Прикл. матем. и механика, 15, в 5 (1951).