АКАДЕМИЯ НАУК СССР
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В. А. СТЕКЛОВА

На правах рукописи

А. М. МОЛЧАНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА — 1963

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В. А. СТЕКЛОВА

На правах рукописи

А. М. МОЛЧАНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА — 1963

Классический прием изучения устойчивости стационарного режима состоит в линеаризации уравнений вблизи положения равновесия. Этот прием, однако, недостаточен, если линеаризованные уравнения оказываются нейтральными.

Реферируемая работа посвящена изучению как раз тех случаев, когда система нейтральна в линейном приближении.

Работа состоит из введения и трех глав.

Введение посвящено методологическому анализу поставленной задачи.

На первый взгляд может показаться, что системы, нейтральные в линейном приближении, не заслуживают внимания, так как встречаются слишком редко. В самом деле, для нейтральности системы нужно, чтобы все собственные значения были чисто мнимыми. Это означает, что такие системы образуют ничтожное меньшинство среди всех грубых систем—многообразие меньшего числа измерений.

Тем не менее системы, нейтральные в линейном приближении, встречаются в приложениях довольно часто. Разрешение этого противоречия в том, что реальные объекты, описываемые грубыми системами неустойчивы с видовой точки зрения, независимо от устойчивости или неустойчивости индивидуальной системы. В случае устойчивости система перестает существовать—как система, способная к движению—потому, что уравновешивается, а в случае неустойчивости—потому, что распадается. Поэтому по истечении достаточно большого промежутка времени в «живых» останутся только системы, достаточно близкие к нейтральным.

Та же самая идея может быть сформулирована иначе, если рассматривать не процесс эволюции, а его результат. Довольно бесспорно, что изучение сложных систем представляет большой интерес. Несколько менее бесспорно, что сложность системы можно характеризовать числом свободных параметров—параметров регулирования—в правых частях уравнений. Если согласиться с этим, то ясно, что те значения параметров, при которых система максимально вырождена, представляют особый интерес. В этих точках система качественно меняет свое поведение и они играют роль, аналогичную роли особых точек в теории аналитических функций.

Немаловажное соображение в пользу изучения негрубых систем доставляют уравнения в частных производных. Рассмотрим гиперболическую систему и константные решения этой системы. Линеаризованная система—линейная гиперболическая система с постоянными коэффициентами—всегда нейтральна, и то, что казалось исключением в обыкновенных уравнениях, оказывается правилом для уравнений в частных производных.

На пути решения поставленной задачи встречаются две основные трудности.

Первая состоит в том, что главные—линейные—члены в правых частях вызывают только быстрые колебания вблизи положения равновесия. Изменения же амплитуды колебаний, имеющие решающее значение в задаче об устойчивости, определяются малыми нелинейными поправками. Приходится, поэтому, каким-то образом преодолевать маскирующее влияние главных членов: Эта задача решается на основе идеи разделения движений в первой главе, где указан общий метод вывода уравнений, определяющих эволюцию системы.

Получающиеся уравнения существенно нелинейны и не допускают интегрирования в квадратурах. Исследование этих уравнений, составляющее вторую главную трудность задачи, проведено во второй главе, на основе изучения расположения особых точек эволюционных уравнений. Третья глава содержит некоторые результаты, относящиеся к устойчивости гиперболических систем.

Перейдем к систематическому изложению содержания работы.

Первый параграф первой главы посвящен изложению идеи разделения движений.

Рассмотрим систему уравнений.

$$\frac{dx}{dt} = A(x) = B(x) + C(x)$$

и две другие системы, соответствующие отдельным слагаемым в правой части:

$$\frac{dy}{dt} = B(y), \quad \frac{dz}{dt} = C(z).$$

Оказывается, что в некоторых случаях движение, определяемое системой A, может быть представлено наложением (суперпозицией) движений B и C. Это значит, что решение системы A получается, если в решение системы B подставить вместо начальных данных решение системы C. Можно показать, что необходимое и достаточное условие разделения движений состоит в «коммутативности» векторных полей B и C:

$$\frac{dB}{dx} C - \frac{dC}{dx} B = 0.$$

Правую часть выписанного условия можно рассматривать, как естественное обобщение на нелинейный случай понятия коммутатора.

Во втором параграфе показано, что для уравнений вида:

$$\frac{du}{dt} = F_0(u) + \varepsilon F_1(u, \varepsilon)$$

существует замена переменных

$$u = x + \varepsilon Q_1(x, \varepsilon),$$

приводящая уравнение к виду, допускающему разделение движений. Получены формулы для Q_1 и правой части эволюционного уравнения в случае периодичности решений невозмущенного уравнения. Оказывается, что главный член эволюционного уравнения получается усреднением возмущающей функции вдоль траекторий невозмущенного движения.

В следующем параграфе показано, что результаты § 2 остаются верными до тех пор, пока—из-за расходимости интегралов—не теряют смысла формулы, определяющие замену переменных. Это, в частности, означает, что метод разделения движений заведомо применим во всех тех случаях, когда применим метод усреднения.

Четвертый параграф посвящен одному приему изучения вырожденных систем—приему «расщепления» параметра. Он состоит в том, что часть членов, зависящих от малого параметра, включается в правую часть невозмущенного уравнения. Поправку следует подбирать так, чтобы снять вырождение и чтобы получившееся «основное» уравнение можно было решить. Выписываются формулы замены переменных для этого случая.

Последний, пятый параграф посвящен случаю линейного невозмущенного уравнения. Показано, что разделение движений можно провести, даже если среднее по траектории и не существует. Окончательные формулы этого параграфа находят применение в последующих главах.

Следует отметить, что все изложенное относится к асимптотической теории, которая вполне достаточна для приложений к теории устойчивости. Вопрос о правильной форме теории возмущений, имеющий большое самостоятельное значение, обсуждается мимоходом в связи с выводом общих формул § 3.

Вторая глава—основная в работе и содержит вывод условий устойчивости систем, нейтральных в линейном приближении.

В первом параграфе обсуждается постановка задачи и формулируется точный вопрос.

§ 2 посвящен выводу эволюционного уравнения. Применение метода, изложенного в § 5 первой главы, позволяет уста-

новить вид главных членов эволюционного уравнения. Получающаяся система называется в дальнейшем для краткости «модельной». Оказывается, что при отсутствии внутренних резонансов, правые части модельной системы суть однородные многочлены третьей степени. Этим не ограничивается специфика модельной системы. Можно, в частности, понизить ее порядок вдвое введением новых переменных —квадратов модулей старых. В новых переменных модельная система приобретает вид:

$$\frac{d\rho^k}{dt} = \rho^k \sum_{l=1}^{n} E_e^k \rho^l. \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Здесь n—число степеней свободы—в два раза меньше порядка исходной системы. Коэффициенты E_e^k вычисляются через первые, вторые и третьи производные правых частей изучаемой системы в стационарной точке.

Следующие—3, 4, 5, 6—параграфы целиком посвящены изучению свойств модельной системы и установлению необходимых и достаточных условий ее устойчивости.

В § 3 доказывается, прежде всего, что любое решение модельной системы, начинающееся внутри (на грани) положительного конуса K ($\rho^k \geqslant 0$), расположено целиком внутри конуса (на той же грани). Утверждение почти непосредственно вытекает из того, что правые части модельной системы содержат множители ρ^k.

Далее вводится понятие инвариантного луча, совершенно аналогично понятию собственного направления в линейных системах. Доказывается, что в каждом линейном подпространстве, порожденном любой гранью (любой размерности) конуса K найдется инвариантная прямая, состоящая либо из устойчивого и неустойчивого луча, либо из двух нейтральных лучей.

В § 4 сформулированы необходимые условия асимптотической устойчивости модельной системы:

Условие K.

Внутри и на границе конуса K нет ни одного нейтрального или неустойчивого луча.

Это условие оказывается также и достаточным условием, но если необходимость очевидна, то доказательство достаточности непросто. Оно проводится построением функции Ляпунова модельной системы, которое настолько громоздко, что его приходится проводить в несколько этапов, используя понятие локальной функции Ляпунова (сокращенно l-функции) Точное определение l-функции дано в конце § 4.

В § 5 указан вид l-функции, подсказываемый строением модельной системы. Такая функция получается, если написать уравнения для $\ln \rho^k$ и сложить их, умножив на положительные

числа η_k. В векторных обозначениях уравнение для l-функции выглядит следующим образом:

$$\ln l = (\eta, \ln \rho) \qquad \frac{d \ln l}{dt} = (\eta, E\rho).$$

Задача построения l-функции сводится, поэтому, к задаче отыскания положительного функционала η, переходящего в отрицательный $\zeta = E^*\eta$ при отображении E^*. Отображение E^* определяется матрицей E^*, сопряженной к матрице $E = ((E_l^k))$ модельной системы.

Доказательство существования функционала η, а следовательно и существования l-функции, основано на теореме о свойствах конуса:

Если образ конуса K при отображении E имеет ненулевое пересечение с самим конусом,

$$K \cap EK \neq 0,$$

то существует грань PK конуса K, на которой достигается одна из крайних ситуаций:

либо PEP вырождается:

$$PEP\rho_0 = 0$$

либо, наоборот, образ конуса содержит конус:

$$PEPK \supset PK.$$

Из этой теоремы вытекают условия разрешимости при $\lambda = 0$ или при $\lambda = 1$ уравнения

$$E\rho_0 = \lambda e,$$

где e-вектор, все компоненты которого равны единице.

Для систем, удовлетворяющих условию K, из сформулированной теоремы вытекает существование l-функции.

Единственный недостаток локальных функций Ляпунова состоит в том, что они обращаются в нуль на границах граней. Этот недостаток устраняется в § 6 следующим простым приемом. Пусть имеются: l-функция интервала, обращающаяся в нуль на концах, и две l-функции концов, перестающие быть l-функциями вдали от «своих» концов. Довольно ясно, что умножив l-функцию интервала на достаточно большой положительный множитель и сложив с нею l-функции концов, мы получим l-функцию отрезка. Учитывая, что результаты § 5 применимы к любой грани конуса, можно построить индуктивным рассуждением полную функцию Ляпунова модельной системы.

В следующем, § 7, функция Ляпунова модельной системы используется для доказательства асимптотической устойчивости исходной системы. Доказательство почти дословно воспроизводит аналогичное доказательство в линейной теории.

Конец параграфа посвящен исправлению ошибочного утверждения, содержащегося в одной из работ автора ([2]). В этой работе утверждалось, что устойчивость систем, содержащих кроме нейтральной еще и линейно-устойчивую компоненту, определяется только свойствами нейтральной компоненты. Это неверно, так как взаимодействие нейтральной компоненты с линейно-устойчивой может привести к неустойчивости всей системы даже в том случае, когда нейтральная компонента устойчива в высших порядках. В § 7 построен пример такой системы. Поэтому вопрос об условиях устойчивости для систем, имеющих кроме нейтральной, еще и линейно-устойчивую компоненту, остается открытым.

§ 8 содержит формулировку достаточных условий **монотонной** устойчивости, которые состоят в **отрицательной** определенности квадратичной формы:

$$(E\rho, \rho) < 0.$$

На большую важность условий монотонной устойчивости указывает приведенный в этом параграфе пример модельной системы двух уравнений:

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi(-\xi + \alpha\eta),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta(\beta\xi - \eta).$$

Положив $\beta = 0$, мы получим систему, формально устойчивую при всех положительных значениях α. Однако несложный анализ показывает, что величина ξ за небольшое (при больших α) время $t \sim \frac{\ln \alpha}{\alpha}$ возрастает до значения $\xi_{max} \sim \alpha\eta(0)$ и затем медленно убывает. Ясно, что если α велико, то система практически неустойчива.

Сказанное делает оправданной постановку вопроса о необходимых и достаточных условиях устойчивости. Дело сводится к изучению условий положительной определенности квадратичной формы **в положительном конусе.** Высказана гипотеза, что такие условия можно получить вычеркиванием части условий обычной дефинитности.

В последнем, девятом параграфе второй главы обсуждается понятие **метастабильности.**

В противоположность обычной точке зрения на метастабильность, как устойчивость относительно малых и неустойчивость относительно больших возмущений, выдвигается предположение, что метастабильность—это нейтральность в линейном приближении и **неустойчивость** в высших порядках. Все дело в величине времени ухода из стационарного состояния. Оказывает-

ся, что для таких систем время ухода резко—степенным образом—зависит от начального возмущения, так что для малых возмущений время ухода очень велико. Выдвинута гипотеза, что и в обычном представлении о метастабильности решающую роль играет именно величина времени ухода, а не наличие малой зоны слабой устойчивости.

В последней главе рассматриваются гиперболические системы квазилинейных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} = V^\alpha_\beta \frac{\partial v^\beta}{\partial x}.$$

Стационарные точки для таких систем есть просто константные решения

$$v^\alpha = v^\alpha_0.$$

Введем, так же как и в обыкновенных уравнениях, малый параметр ε, характеризующий величину изучаемой окрестности. Система приобретает вид:

$$v^\alpha = v^\alpha_0 + \varepsilon u^\alpha,$$

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = U^\alpha_\beta \frac{\partial u^\beta}{\partial x} + \varepsilon U^\alpha_{\beta\gamma} u^\gamma \frac{\partial u^\beta}{\partial x} + \ldots$$

Здесь U^α_β, $U^\alpha_{\beta\gamma}$ — постоянные, вычисляемые по коэффициентам системы в изучаемой точке v^α_0.

Выше уже отмечалось, что линейное приближение для гиперболической системы оказывается всегда нейтральным. Заметим, что это следствие кососимметричности оператора $\frac{\partial}{\partial x}$. Другая важная особенность этого оператора—его неограниченность, приводит к тому, что существование решения можно гарантировать только на временах, малых по сравнению с $1/\varepsilon$. Уже на временах порядка $1/\varepsilon$ может наступить так называемая «градиентная катастрофа» и решение, во всяком случае в классическом смысле этого слова, перестает существовать. Для одного уравнения, например, «градиентная катастрофа» приводит к тому, что решение становится, при достаточно больших t, многозначной функцией x.

С чисто формальной точки зрения указанное обстоятельство не препятствует построению теории возмущений и следовательно, теории устойчивости в любом порядке, так как для проведения процедуры разделения движений нужно только, чтобы невозмущенное решение существовало при всех значениях t. Однако с практической точки зрения имеет смысл рассматривать только первый член теории возмущений, так как

все остальные члены на временах $^1/\varepsilon$ слишком малы, чтобы их стоило учитывать.

Как уже было сказано, рассмотрение гиперболических систем на временах, больших, чем $^1/\varepsilon$ лишено смысла, по крайней мере до тех пор, пока не дано определение обобщенного решения. Но любое определение обобщенного решения связано с изменением самой изучаемой системы, что можно интерпретировать, как изменение типа возмущений, действующих на гиперболическую систему с постоянными коэффициентами. Вопрос об устойчивости в высших порядках выходит, поэтому, за пределы реферируемой работы.

Остается задача об устойчивости гиперболических систем в первом нелинейном приближении, допускающая рассмотрение в рамках классических решений. Отметим сразу же, что могут представиться только две возможности: либо система сохраняет нейтральность, либо становится неустойчивой. Устойчивости появиться не может, так как она могла бы возникнуть только во втором порядке теории возмущений.

Приведенные соображения составляют содержание первого параграфа третьей главы, посвященного анализу поставленной задачи. Кроме того параграф содержит некоторые замечания о связи теории устойчивости с классификацией уравнений в частных производных.

Во втором параграфе рассмотрены некоторые гиперболические системы, остающиеся нейтральными во всех порядках. Тождественно-нейтральные системы можно рассматривать как предельный случай устойчивых систем и доказательство тождественной нейтральности удобнее всего проводить построением функции Ляпунова. Разница в том, что для тождественно-нейтральных систем производная функции Ляпунова в силу уравнений движения тождественно равна нулю, в то время как для систем устойчивых эта производная должна быть отрицательно определенной. Функция Ляпунова для уравнений в частных производных есть, вообще говоря, нелинейный интегральный функционал и ее следовало бы называть функционалом Ляпунова. Однако для систем, рассмотренных в § 2, а именно, для системы уравнений гидродинамики и произвольных гиперболических систем двух уравнений, удается построить функцию Ляпунова весьма частного вида:

$$H[u] = \int_a^b h(u)\,dx.$$

Это естественное обобщение понятия полной энергии для линейных колебаний. Главный (квадратичный относительно отклонения u) член соответствует энергии малых колебаний вблизи положения равновесия и должен быть положительно

определенной квадратичной формой. Функция $h(u)$ играет роль плотности энергии и должна удовлетворять «закону сохранения»:

$$\frac{\partial h(u)}{\partial t} = \frac{\partial g(u)}{\partial x}$$

являющемуся следствием уравнений движения.

В § 2 проводится построение дефинитной плотности $h(u)$ для перечисленных выше систем и доказывается, следовательно, их тождественная нейтральность.

Как уже отмечалось выше, постановка вопроса об устойчивости имеет смысл, при классическом понимании решения, только на временах порядка $1/\varepsilon$. При изучении систем, сохраняющих нейтральность только на таких временах, полезно понятие асимптотической плотности энергии. Основная идея состоит в том, что если нас не интересуют очень большие времена $t \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$, то и «закон сохранения» не должен выполняться точно. Нужно только, чтобы он «почти» выполнялся. Аккуратное определение асимптотической плотности дано в § 3. Оно состоит в том, что асимптотической плотностью порядка n называется функция $h(u)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} + O(|u|^{n+1}) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Целесообразность такого определения подтверждается тем, что гиперболичность системы оказывается равносильной наличию у системы дефинитной плотности второго порядка.

§ 3 содержит вывод условий, при выполнении которых система гиперболических уравнений обладает дефинитной плотностью третьего порядка. Для системы трех гиперболических уравнений найденные условия оказываются необходимыми и достаточными. Нетрудно понять, что эти условия являются, также, достаточными условиями сохранения нейтральности во втором порядке.

В § 4 устанавливаются необходимые условия нейтральности во втором порядке. Весьма примечательно то обстоятельство, что необходимое условие нейтральности совпадает с условием существования плотности третьего порядка.

Мы получаем, таким образом, что для систем трех гиперболических уравнений **необходимое и достаточное условие сохранения нейтральности во втором порядке состоит в наличии у системы дефинитной плотности соответствующего (третьего) порядка.**

Основные результаты диссертации опубликованы в двух заметках автора ([1]) и ([2]).

Подробное рассмотрение истории вопроса об устойчивости систем, нейтральных в линейном приближении, можно найти в книге Малкина ([3]). В этой книге содержится разбор случая двух пар чисто мнимых корней векового уравнения. Случай одной пары чисто мнимых корней разобран еще в классической работе Ляпунова ([4]).

Теория возмущений для обыкновенных уравнений составляет предмет книги Боголюбова и Митропольского ([5]). Однако там не сформулирована теорема Дюлака, специализирующая общие результаты применительно к исследованию на устойчивость. Эту теорему можно найти в другой книге ([6]).

Разбираемое в § 9 главы 2 определение метастабильности цитировано по книге ([7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Молчанов.* Д.А.Н. 1961 г., т. 136, № 5.
2. *А. М. Молчанов.* Д.А.Н. 1961 г., т. 141, № 1.
3. *И. Г. Малкин.* Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952 г.
4. *А. М. Ляпунов.* Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935 г.
5. *Н. Н. Боголюбов* и *Ю. А. Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1955 г.
6. *В. В. Немыцкий* и *В. В. Степанов.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949 г.
7. *Л. Ландау* и *Е. Лифшиц.* Статистическая физика. Гостехиздат, 1951 г.

Т 02047 от 31/I 1963 г. Зак. 405 Тир. 250

Типография ЦИНТИ, Москва, Шелепиха, 4-я ул., д. 1 а.